Distribüsyonların Tarihsel Gelişimi

Arif Mardin / mardin.arif@gmail.com

I) Giriş

Bu yazının amacı, distribüsyonlar teorisinin nasıl geliştiğini kapsamlı bir biçimde anlatmak değildir. Özellikle de matematikçilerin çalışmalarında konunun nasıl geliştiğine dair ayrıntılara girmeyeceğim, zira teknik içerik giderek hızla artar ve ilgi alanımın dışına çıkıp boyumuzu aşabiliriz. Ancak, matematikçi olmayıp da benzer kavramları formel hesaplarında hiç çekinmeden kullanmış olan Heaviside ve Dirac'ın katkılarını daha ayrıntılı olarak sunmayı tercih edeceğim. Burada amacım, Laurent Schwartz'ın geliştirdiği distribüsyonlar teorisinin ortaya çıkışında her ikisinin oynadığı önemli role dikkat çekmektir. Yazının kabul edilebilir uzunlukta kalabilmesi ve okuyucuyu sıkmaması için böyle bir tercih yaptım. Değinemediğim konulara merak duyabilecek okuyucular için, bulabildiğim ve yararlandığım kaynakları, yazının sonunda bulabilirsiniz.

Distribüsyonların, ya da diğer adıyla genelleştirilmiş fonksiyonların, matematiksel bir konu olarak ortaya çıkışları 20. yüzyılın ilk yarısına tekabül eder. İlk kez distribüsyonların matematiksel tanımını verip özelliklerini ayrıntılarıyla kanıtlayan fransız matematikçi Laurent Schwartz (1915-2002), bu çalışması nedeniyle 1950 yılında Fields Madalyası'na layık görüldü. Benzer bir matematiksel teoriyi Sovyetler Birliği'nde Sergei Sobolev (1908-1989) daha 1936 yılında kısmî türevli hiperbolik diferansiyel denklemlerde Cauchy probleminin incelenmesiyle ilgili olarak yaptığı bir çalışmasında geliştirmiştir([So]). Ancak, hem o yıllarda "demir perde" ülkelerinde yapılan çalışmaların "batı" diye adlandırılan dünyanın diğer ülkelerinde duyulmalarının geç ve sınırlı olması, hem de L.Schwartz'ın teorisinin çok daha geniş kapsamlı olması sebebiyle, Fields Madalyası sadece ona verilmiştir.

Oysa matematikçileri distribüsyonların teorik bir yapıya kavuşturulmasına itecek olan Heaviside fonksiyonu, onun türevi olan Dirac "fonksiyonu" ve daha üst dereceden türevleri yıllardır fizikçiler ve mühendisler tarafından, yapılan hesapların matematiksel olarak anlamlı olup olmadıkları hiç sorgulanmadan kullanılıyordu. Sözünü ettiğimiz Dirac "fonksiyonu", ya da "Dirac deltası", elektrik mühendisliği ya da fizik bölümlerinde okuyan tüm öğrencilerin aşina oldukları son derece tekil, tabiri caizse "el yakan" bir nesnedir. Şöyle ki, tanımını hatırlatırsak:

$$\delta(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\, dx = 1.$$

Yukarıda verilen nesnenin matematiksel anlamda bir fonksiyon olarak tanımlanması, analiz dersini iyi kötü kavramış hiçbir matematik öğrencisi için kabul edilemez: 20. yüzyılın ilk yarısının matematiksel alandaki bir diğer dev ilerlemesi olan Lebesgue integrasyonu teorisine göre biliyoruz ki böyle bir fonksiyon hemen hemen her yerde sıfırdır. Oysa dün olduğu gibi bugün de gerek mühendislik gerekse fizik eğitimi gören öğrenciler bu ifadeleri günlük hesaplarında hiçbir endişeye kapılmadan kullanmaktadırlar. Kendim de böyle bir eğitimi (elektrik mühendisliği) almış olduğumdan bu çelişkiyi birkaç yıl yaşadım, ta ki son sınıfta seçmeli bir derste "distribüsyon" kavramıyla tanışana kadar...

Sözünü ettiğimiz çelişkiyi örnekleyecek olursak, basit bir elektrik devresini çalıştırmak için devreye pil ya da elektrik enerjisi veren bir jeneratör bağlandığı an $t = 0$ olarak alınır. Devrenin davranışının t'nin sıfırdan büyük eşit olduğu zamanlarda ya da pozitif reel eksenin herhangi bir altkümesinde incelenmesi istenir. $t < 0$ için ise sanki "big bang" öncesiymiş gibi herşey sıfırlanır. Gerek enerji kaynağının devreye sokuluşunun gerekse elde edilen çözümlerin sadece $t > 0$ için geçerli olduğunu ifade etmek için Heaviside fonksiyonuyla çarpılırlar:

$$H(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$

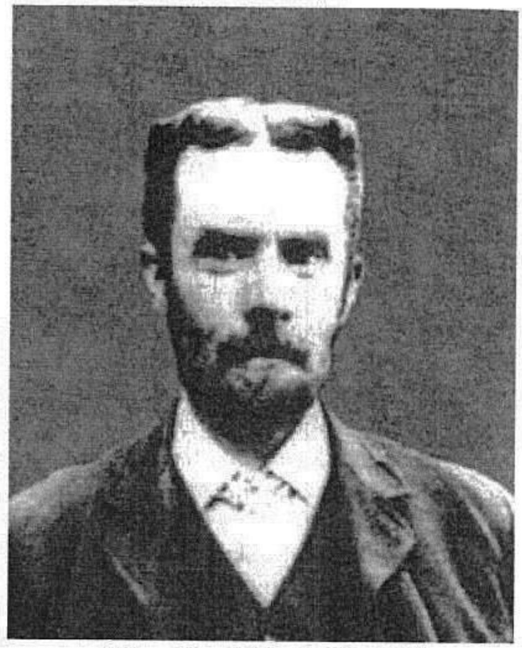
Görüldüğü gibi, Heaviside fonksiyonunun $t = 0$ noktasında birinci türden bir süreksizliği vardır (yani sağdan ve soldan limitleri var fakat eşit değiller; bir diğer deyişle fonksiyon bu noktada bir sıçrama yapıyor) ve türevi de bu noktada tanımlanmamıştır. Bunun bir matematikçi için önemi yoktur, çünkü ilerde göreceğimiz gibi, bir distribüsyon olarak ele alındığında bir fonksiyonun hemen hemen heryerde tanımlanmış olması yeterlidir. Oysa bu kavramlarla tanışmamış olan mühendislik öğrencisi ya da fizikçi, bu konuda bir rahatsızlık duyar, çünkü bilir ki hesaplarında bir noktada tanımlanmamış olan böyle bir fonksiyonun en az birinci dereceden, hatta belki de ikinci dereceden türevini almak durumunda kalacaktır. İşte o zaman işler sarpa saracaktır. Hoş, Heaviside fonksiyonunun türevinin Dirac "fonksiyonu" olduğu tüm mühendislik ve fizik kitaplarında vardır, fakat ancak distribüsyon olarak ele alındıklarında kanıtlanabilecek olan bu ifadenin matematiksel bir kanıtını 19. yüzyıl teknikleriyle vermek mümkün değildir. İşte bu nedenledir ki 20. yüzyılın başında Lebesgue integralinin de matematikçilerin alet kutusuna katılmasıyla birlikte bu paradoksal duruma son verme imkânı ortaya çıkmıştır.

Ancak, distribüsyonlar teorisine olan gereksinim yalnızca fizikte ve mühendislikte ortaya çıkmamıştır. Matematikçiler, özellikle de 1920-30'lu yıllarda kısmî türevli diferansiyel denklemlerle uğraşan ekoller de arayış içerisindeydiler. Ta ki Laurent Schwartz 1944'den itibaren makalelerini [S1, S2, S3] yayınlamaya başlayıp 1950-51'de de iki cilt halinde distribüsyonlar teorisi üzerine bir klasik olan "Théorie des Distributions" kitabını çıkarana kadar.

Şimdi önce 19. yüzyılda yaptığı çalışmalarla bu alanda öncülük etmiş, ayrıca bilim insanı olarak da yaşamı, görüşleri ilginç olan Oliver Heaviside hakkında detaylı bilgi vermek ile başlayalım: Aşağıda da ayrıca belirteceğim gibi, "Dirac deltası" adıyla yukarıda tanımladığımız "fonksiyon"u, biraz değişik bir biçimde de olsa, aslında Dirac'tan çok önce Heaviside da kullanmıştı!

II) 19. Yüzyıl ve Oliver Heaviside

Oliver Heaviside (1850-1925) yoksul bir ailenin çocuğu olarak Londra'da dünyaya geldi. Kendi kendini eğiten Heaviside, amcası Charles Wheatstone (elektrik mühendisliğinde önemli bir elektrik devresi olan "Wheatstone köprüsü"nün mucidi olup o sıralarda Londra Üniversitesine bağlı ünlü King's Koleji'nde profesörlük yapıyordu) aracılığıyla Newcastle'da Anglo-Danish telgraf şirketinde telgraf operatörü olarak iş buldu. Yeni keşfedilmiş olan telefon iletişimine büyük ilgi duymaya başladı. Ayrıca bilim dünyasında yeni olup yankı yaratan Maxwell teorisini ve 19. yüzyıl fizikçilerinin kullandığı matematiksel yöntemleri mükemmel bir biçimde öğrendi. 1873 yılında Wheatstone köprüsünün özelliklerini kullanarak ters yönde hareket eden iki sinyali aynı anda aynı hat üzerinden nasıl gönderilebileceğini keşfetti. Giderek artan bir sağırlaşma yaşamaya başladığından 1874'te Anglo-Danish şirketinden ayrılıp Londra'ya ebeveynlerinin yanına döndü. Yaşamının geri kalan kısmında maaşlı olarak hiçbir yerde çalışmadı. Yakın ailesinin yardımı ve devletten aldığı küçük bir maaşla geçindi.



Oliver Heaviside (1850-1925)

Ancak Heaviside'ın bilimsel üretkenliği tükenmedi, aksine baş döndürücü bir biçimde arttı (1889 ve onu izleyen on-onbeş yıl boyunca ayda iki-üç makalesi yayınlanıyordu)! Heaviside'ın bilim çevrelerinde büyük yankı uyandıran çalışması, 1885-1887 yılları arasında *Electrician* adlı dergide yayımlanan "Elektromanyetik Endüksiyon ve Yayılımı" başlıklı bir dizi makalesiydi. Yukarıda da belirttiğim gibi, Maxwell'in teorisine büyük ilgi duydu ve basitleştirilmesi için uğraştı. Maxwell'in denklemlerini bugün bildiğimiz haliyle ilk veren, Heaviside'dır. 1901 yılında radyo dalgalarını çok uzun mesafelere göndermenin mümkün olduğu anlaşıldığında atmosferin üst kısmında iyonlaşmış yansıtıcı bir tabakanın varlığını Kennelly ile birlikte ilk öngören Heaviside olduğundan bu tabakaya önceleri Kennelly-Heaviside tabakası denmiş, sonradan da iyonosfer olarak değiştirilmiştir. Yaptığı çalışmalar dünyaca tanınmasına neden olmuş, çeşitli ödüllere layık görülmüştür: 1891'de Britanya'nın ünlü bilim akademisi olan Royal Society'e üye seçilmiş, 1905 yılında Almanya'nın önde gelen üniversitelerinden Göttingen'den fahrî doktora almış, 1908'de Britanya'daki Institute for Electrical Engineers'in ve 1918'de de American Institute of Electrical Engineers'in onursal üyesi seçilmiştir.

Distribüsyon Nedir?

Bu bölümde olabildiğince kısa olarak distribüsyonları tanıtmaya çalışacağız. Yazımızda distribüsyonların "uygun" fonksiyon uzaylarında tanımlanan sürekli lineer fonksiyoneller olduğunu söyledik. Şimdi bu söylemimizi teknik ayrıntılar içinde boğulmadan biraz açalım.
Matematikçiler "uygun" fonksiyon uzayını test fonksiyonu uzayı diye adlandırıyorlar. Distribüsyonların da ne derece tekil olduklarını bu uzaydaki fonksiyonlar üzerinde sanki test ediyormuşuz gibi düşünebiliriz. Test fonksiyonu uzayının seçimi, incelenen probleme bağlıdır. Ancak hepsi birer topolojik vektör uzayıdır. Bir test fonksiyonu uzayında tanımlanan distribüsyon da sürekli lineer fonksiyonel olduğundan test fonksiyonu uzayının düali olan uzayın elemanıdır. Diğer bir deyişle distribüsyonlar da topolojik vektör uzayı oluştururlar.
Uygulamalarda, özellikle de fizik ve mühendislikte, en sık kullanılan test fonksiyonu uzayları $\mathfrak{D}$ ve (Laurent Schwartz'a atfen) $\mathcal{S}$ dir. Bu uzaylara tekabül eden distribüsyon uzayları da sırasıyla $\mathfrak{D}'$ ve $\mathcal{S}'$ olarak gösterilmektedir.
Önce $\mathfrak{D}$ ve $\mathcal{S}$ uzaylarını ele alalım. Bu iki uzaydaki test fonksiyonlarının ortak özelliği, sonsuz kere sürekli olarak türevlenebilmeleridir. Matematik yazınında bu fonksiyonların kümesi $\mathcal{C}^\infty$ olarak gösteriliyor.
Test fonksiyonlarının ikinci özelliği ise, argümanları sonsuza gittiğinde fonskiyonların "hızla" sıfıra gitmeleri. Bu hızla sıfıra gidiş $\mathfrak{D}$ uzayında çok radikal bir biçimde sağlanıyor: Fonksiyonların sıfırdan farklı olduğu küme tıkız, yani kapalı ve sınırlı. Bir örnek verelim: kolaylık olsun diye $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}(\mathbb{R}^d)$'de $d = 1$ olarak alalım.

$$f(x) = \begin{cases} \exp(\frac{1}{x^2-1}) & |x| \leq 1 \text{ ise} \\ 0 & |x| > 1 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan f fonksiyonunun $\mathcal{C}^\infty$ olduğu ve tıkız $[-1, +1]$ kümesinde sıfırdan farklı olduğu, dolayısıyla $f \in \mathfrak{D}(\mathbb{R})$ yazılabileceği açıktır.
Bir başka örnek daha alalım: Eğer $\alpha, \beta\ :\ \alpha < \beta$ iki gerçel sayı ise

$$f(x) = \begin{cases} \exp(\frac{1}{(x-\alpha)(x-\beta)}) & x \in [\alpha, \beta] \text{ ise} \\ 0 & x \notin [\alpha, \beta] \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyonun $\mathcal{C}^\infty$ve $[\alpha, \beta]$ tıkız kümesi dışında sıfır olduğundan $\mathfrak{D}(\mathbb{R})$ uzayında olduğunu görürüz.
$\mathcal{S}$ uzayındaki test fonksiyonlarının da $\mathcal{C}^\infty$ olduklarını biliyoruz. Bu fonksiyonlar aynı zamanda "hızla azalma" özelliğine sahiptirler. "Hızla" sıfatıyla belirtilmek istenen şudur: Argümanı sonsuza gittiğinde ($|x| \to \infty$), fonksiyonun kendisi ve tüm türevleri, olabilecek en üst dereceli polinomun tersinden daha hızlı sıfıra giderler. Bu özelliği matematiksel olarak

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| x^m \cdot f^{(n)}(x) \right| < \infty \quad \forall m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}$$

şeklinde yazabiliriz. Burada $f^{(n)}$, f fonksiyonunun n. dereceden türevini gösteriyor. $\mathcal{S}$ uzayındaki test fonksiyonlarına tipik bir örnek olarak $\exp(-x^2)$, yani Gauss fonksiyonu verilebilir. Ayrıca $\mathfrak{D}$ uzayının $\mathcal{S}$'in bir altuzayı olduğu açıktır.
Son olarak distribüsyon kavramının tanımını ele alalım. $\mathfrak{D} \subset \mathcal{S}$ olduğunu biliyoruz. Düal uzaylarda $\mathcal{S}' \subset \mathfrak{D}'$ olduğundan doğrudan $\mathfrak{D}'$ uzayındaki distribüsyonlara odaklanalım. Bu amaçla önce $\mathfrak{D}$ uzayında yakınsamanın ne demek olduğunu görmemiz gerekiyor:

Tanım 1. $\{(f)_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$, $\mathfrak{D}(\mathbb{R})$ uzayında bir test fonksiyonu dizisi olsun. Aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa bu dizinin bir $f \in \mathfrak{D}$ test fonksiyonuna yakınsadığını söyleriz:

i) Öyle bir $\mathcal{O} \in \mathbb{R}$ tıkız kümesi var ki

$$\text{supp } f_n \subset \mathcal{O} \quad \forall n \in \mathbb{N};$$

ii) $\forall p \in \mathbb{N}$, $\{(f)_n^{(p)}\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ dizisi $f^{(p)}$'ye düzenli yakınsar.

Burada $\text{supp}(f)$, f'nin sıfırdan farklı olduğu kapalı kümedir.
$\mathfrak{D}$ uzayında yakınsama kavramının bu şekilde anlaşılması gerektiğini hatırda tutarak $\mathfrak{D}'$ uzayındaki distribüsyonların tanımını verelim:

Tanım 2. $\mathfrak{D}$ uzayı üzerindeki her sürekli lineer fonksiyonele *distribüsyon* denir.

Daha açık biçimde yazarsak, $\forall f \in \mathfrak{D}$ için $T \in \mathfrak{D}'$, $T(f)$ ya da $< T, f >$ olarak yazılan sanal bir sayı verir, öyle ki:

i) *(lineerlik)* $\forall f, g \in \mathfrak{D}$ ve $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ için

$$T(\lambda \cdot f + g) = \lambda \cdot T(f) + T(g),$$

ii) *(süreklilik)* $\{(f)_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$, $\mathfrak{D}$ uzayında verilmiş ve $n \to \infty$ için $f \in \mathfrak{D}$ fonksiyonuna yakınsayan bir test fonksiyonu dizisiyse

$$\lim_{n \to \infty} T(f_n) = T(f)$$

eşitliği geçerlidir.

Heaviside, önsezisi son derece güçlü bir bilim insanıydı. Yaptığı hesapların matematiksel olarak titizlikle kanıtlanması gibi bir endişesi yoktu. Örneğin, kullandığı bir serinin ıraksak olması, ya da denklemlerinde fraksiyonel kuvvetler içeren diferansiyel operatörlerin olması onu hiç endişelendirmiyordu. Kullandığı yöntemler zaman içinde "Symbolic/Operational Calculus" (Sembolik/Operasyonel Hesap) adını almış ve fiziksel önseziyi her zaman matematiksel kanıtlardan daha önemli görmüştü. Heaviside'a göre, matematiksel kanıtlarla uğraşmak fizikçinin çalışmasında ona ayak bağı oluyordu:

İhtimamlı kanıtlar formüle etmek için durmak zorunda kalmak, fiziksel-matematiksel araştırmaları durdurur... fiziksel problemleri çözerken herşeyden önce titiz formülasyonlara gereksiz gösterişe yer olmamalıdır... Problemin fiziksel özünü bertaraf ederek onu saf matematiksel bir alıştırmaya dönüştürme pratiğinden olabildiğince uzak durulmalıdır... Savlarla ve sonuçlarıyla yapılan bir fizik araştırmasından daha çok nefret edilecek ne olabilir? Soyut matematikte bile bu yeterince berbattır, ve umarım ki titiz kanıtlarla uğraşanlar Fourier, Thomson ve Tait, Maxwell ya da Rayleigh'den ders alırlar da, az biraz hayal gücü katarak anlattıklarını daha ilginç hale getirirler... [yakınsak seriler ve tam sayı dereceli türevler] çok daha anlaşılması güç ve iyi anlaşılmamış sorulardır, örneğin ıraksak serilerin, kesirli dereceli türevlerin ya da integrasyonların ve ilgili konuların anlamı ve gerçekte manipülasyonları gibi. Yakınsak serilerle ve tam sayı dereceli türevlerle çalışmak, ve ıraksak serilere ve kesirli dereceli türevlere anlamsız ve pratik olarak faydasızmış gibi bakmak, hatta sanki yoklarmış gibi tamamen görmezlikten gelmek alışılagelmiş tutumdur... Eğer hazım sürecini tam anlamıyorsam yemek yemeyi red mi edeceğim? Sonuçtan tatmin oluyorsam elbette ki hayır. Benzer bir biçimde bir fizikçi, uyguladığı testler vasıtasıyla, elde ettiği sonuçların doğruluğundan tatmin oluyorsa, titiz olmayan yöntemleri yararlı ve tatmin edici biçimde kullanabilir. [H2, paragraf 222-225]

Oysa 19. yüzyılın sonunda matematik dünyasında Riemann, Poincaré ve özellikle Weierstrass'ın başını çektiği epsilon-deltalı "rigorous" matematik ağırlığını koymuş, yeni nesiller bu yaklaşımla matematikçi eğitimini tamamlamışlardı. Bu nedenle, Heaviside'ın iki makalesinin basıldığı [H3] ünlü "Proceedings of the Royal Society", ıraksak serilerin kullanıldığı üçüncü bir makaleyi geri çevirdi, ve bir daha hiçbir makalesini yayınlamadı. Heaviside bu tutuma çok üzüldü:

Cambridge matematikçisi olmayan insanlar bile adalete layıktır, fakat çok korkarım bunu her zaman alamıyorlar, özellikle de alçak gönüllü ve uysal olanlar, ve de tepeden bakılmaktan çekenler. [H2, paragraf 226]

Heaviside, sembolik hesap yöntemlerinin doğru olduğuna inanıyordu çünkü doğru sonuçlar elde edebiliyordu. Dönemin önde gelen matematikçileriyle giriştiği tartışmayı kaybeden taraf o oldu, çünkü hesap yöntemlerinin matematiksel açıklamasını verebilecek durumda değildi. Geliştirdiği teorinin reddedilmesi onun moralini olumsuz yönde etkiledi, yaşamının sonuna doğru ruhsal dengesini önemli ölçüde yitirdi.

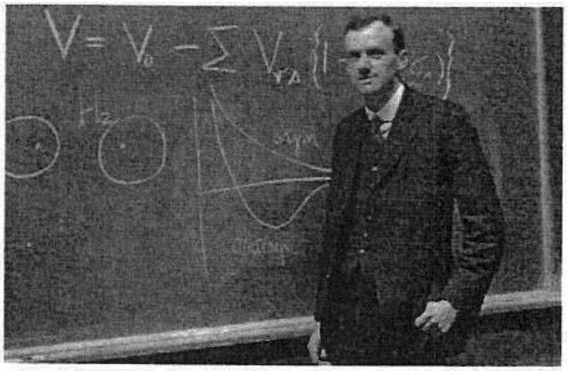
Proceedings of the Royal Society dergisinin yayın kurulunda ülkenin meşhur Cambridge Üniversitesinin seçkin matematikçileri de bulunuyordu. Bunlardan Edmund Whittaker, Heaviside'ın ölümünden üç yıl sonra şöyle yazmaktan kendini alamayacaktı:

Otuz yıldan sonra geri dönüp tartışmaya baktığımız zaman, bugün [Heaviside'ın] Operasyonel Hesabını Poincaré'nin otomorfik fonksiyonların keşfiyle ve Ricci'nin tansörel hesabı bulmasıyla birlikte ondokuzuncu yüzyılın son çeyreğinin en önemli üç matematiksel ilerlemesi olarak tanımamız gerekiyor. Onun uygulamaları, genişletilmeleri ve doğrulanmaları günümüzün matematiksel etkinliklerinin hatırı sayılır bir bölümünü oluşturmaktadır. [H1, sayfa XXX]

Gerçekten de yirminci yüzyılın başından itibaren gerek Avrupa'da gerekse ABD'de Heaviside'ın geliştirdiği Symbolic (ya da Operational) Calculus birçok matematikçi tarafından incelenip daha titiz matematiksel temellere oturtulmaya çalışıldı. Bunların arasında Bromwich, Carson, van der Pol, Niessen, Doetsch, Paul Lévy gibi isimlerin önde geldiğini belirtmekle yetinelim ve daha ayrıntılı bilgi edinmek isteyen okuyucuya da Jesper Lützen'in çalışmalarını [L1,L2] önererek distribüsyonların matematiksel bir teori olarak ortaya çıkmasında kilit rol oynayan ancak matematikçi olmayan bir diğer kişinin katkılarını inceleyelim.

III) 20. Yüzyıl ve P.A.M. Dirac

Paul Adrien Maurice Dirac (1902-1984), orta halli bir ailenin ikinci çocuğu olarak İngiltere'nin Bristol kentinde dünyaya geldi. Bristol Üniversitesinin elektrik mühendisliği bölümünden 1921 yılında, yani ondokuz yaşındayken, birincilikle mezun oldu. Matematiğe büyük ilgisi vardı. Babasının teşvikiyle, mezuniyetinin ardından aynı üniversitede burslu olarak matematik eğitimi gördü. Sınavlardaki üstün başarısı da ona Cambridge Üniversitesine 1923 yılında doktora öğrencisi olarak kabul edilmesini sağladı. Odaklanmak istediği konu, o sıralarda üstünde çok çalışılan, Einstein'ın özel ve genel görecelik teorileriydi. Üniversiteye girişinin altıncı ayının sonunda istatistiksel mekanik konusunda ilk iki makalesini yazdı. Cambridge'deki ünlü fizikçilerden Fowler'ın kuantum teorisi derslerine katıldı ve konuya büyük ilgi duydu. Bohr, Heisenberg, Pauli ve Schrödinger gibi büyük fizikçilerin çalışmaları vasıtasıyla kuantum mekaniğinin fiziksel ilkelerinin formüle edildiği bir dönemde Fowler'ın araştırma asistanı oldu. 1924 yılında kuantum problemleriyle ilgili makalesi yayınlandı. Ardından son derece üretken bir dönem başladı. Yazdığı makaleler kuantum mekaniğinin kurucu çalışmaları arasında sayılır. 1926 yılında bitirdiği doktora tezi "kuantum mekaniği" başlıklı ilk tez olarak bilinir.



Paul Adrien Maurice Dirac (1902-1984)

Dirac, 20. yüzyılın en büyük fizikçilerinden biridir. Modern kuantum teorisinin kurucularındandır. Pozitron adıyla bilinen temel taneciğin varlığını teorik olarak tahmin etmesi ve ardından taneciğin yüksek enerji laboratuarlarında gözlemlenmesi bilimin en büyük buluşlarından biri olarak değerlendirilir. Sayısız onursal ve diğer ödüllerinin arasında en başta 1933 yılında henüz 31 yaşındayken Schrödinger'le birlikte paylaştığı Nobel Fizik Ödülü gelir.

Bu olağanüstü kişinin yaşamı ve çalışmalarıyla ilgilenen okuyucuya Graham Fermelo'nun yazdığı titiz biyografiyi [F1] önerelim ve tekrar Dirac'ın doktora tezine dönelim, çünkü konumuzu yakından ilgilendiriyor. Dirac'ın tezinin daha genişletilmiş hali 1930 yılında kitap olarak basıldı [D1]. Kuantum mekaniği üzerine yazılmış ve klasik olmuş birkaç kitaptan biridir: 85 yıl sonra bile basılmakta olup ileri düzey kuantum mekaniği derslerinin olmazsa olmaz kaynaklarından biridir. Kitabın 1967'de basılan düzeltilmiş 4. baskısının 58. sayfasında 15. bölümün başlığı "Delta Fonksiyonu"dur! Ancak, Dirac'ın adıyla ünlenen bu "fonksiyon" aslında ilk kez 1927 yılında yazdığı bir makalede [D2] tanımlandı. Bu nedenle önce 1927'de yayınlanan makalesinden konumuzla ilgili bir alıntı yapalım:

Tabii ki $\delta(x)$, x'in tam anlamıyla gerçek fonksiyonu olmayıp yanlızca belli bir fonksiyon dizisinin limiti olarak ele alınabilir. Yine de $\delta(x)$ kuantum mekaniğinin bütün amaçları için sanki gerçek bir fonsiyonmuş gibi, yanlış sonuçlar elde etmeden kullanılabilir. $\delta(x)$'in diferansiyel katsayıları, yani $\delta'(x), \delta''(x), \ldots$ de kullanılabilirler ki bunlar $\delta(x)$'ten daha da az "gerçek" ve daha da süreksizdirler.

Şimdi de "Kuantum Mekaniğinin ilkeleri" adlı kitabının [D1] yukarıda belirttiğimiz bölümünden uzunca bir alıntı yapalım:

10. bölümdeki hesaplarımız bizi belli bir sonsuz tipini içeren büyüklükleri gözönüne almaya götürdü. Bu sonsuzluklarla ilgilenmek amacıyla kesin bir notasyon elde etmek için x parametresine bağlı ve aşağıdaki koşulları sağlayan bir $\delta(x)$ büyüklüğünü öne sürüyoruz:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\mathrm{d}x = 1, \quad \delta(x) = 0 \ \forall x \neq 0 \qquad (1)$$

$\delta(x)$'in şeklini elde etmek için x reel değişkenli bir fonksiyon alın, öyle ki $x = 0$ noktasını içeren (diyelim ϵ uzunluğunda) bir aralığın dışında heryerde sıfır olsun, ve bu aralıkta o kadar büyük olsun ki aralık üzerindeki integrali bire eşitlensin. Fonksiyonun bu aralıktaki tam şeklinin önemi yoktur, yeter ki gereksiz çılgınca değişimler olmasın (örneğin, yeter ki fonksiyon hep ϵ^{-1} derecesinde olsun). O zaman $\epsilon \to 0$ limitinde bu fonksiyon $\delta(x)$'e gidecektir.

$\delta(x)$, x'in matematikte bilinen tanımıyla verilen bir fonksiyon değildir (tanımlandığı kümenin her noktasında belli bir değeri olması gerekir); daha genel bir olgudur. Fonksiyonun bilinen tanımından farkını göstermek için ona "uygunsuz (improper) fonksiyon" diyebiliriz. Bu nedenle matematiksel analizde bilinen fonksiyonlar gibi kullanılabilecek bir büyüklük olmayıp, tutarsızlıkların doğmayacağı aşikar olan bazı basit cinsteki ifadelerde kullanılmakla sınırlandırılmalıdır.

$\delta(x)$'in en önemli özelliği aşağıdaki eşitlikle örneklenir

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x)\mathrm{d}x = f(0), \qquad (2)$$

burada $f(x)$, x'in herhangi bir sürekli fonksiyonudur. Bu eşitliğin geçerliliğini $\delta(x)$'in yukarıda verdiğimiz şeklinden kolayca görebiliriz. (2) eşitliğinin sol yanı $f(x)$'in sadece sıfırın [başlangıç noktasının] çok yakınındaki değerlerine bağlıdır, böylece temel bir yanlış yapmadan $f(x)$'i sıfırdaki [başlangıç noktasındaki] değeri olan $f(0)$ ile değiştirebiliriz. Böylece (2) eşitliği (1)'deki ilk denklemden elde edilir. (2)'de sıfır noktasında bir *değişim yaparak, herhangi bir gerçel a sayısı için*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x-a)\mathrm{d}x = f(a), \qquad (3)$$

formülünü elde ederiz. Bu nedenle x'e bağlı bir fonksiyonun $\delta(x-a)$ ile çarpıldığı tüm x değerleri üzerinden integralinin alınması, x yerine a konması işlemiyle özdeştir. Bu genel sonuç, x'in fonksiyonunun skaler olmayıp, x'e bağlı bir vektör ya da lineer operatör olduğu durumlarda da geçerlidir.

...

(2) ve (3) bize şunu gösteriyor ki, uygunsuz (improper) bir fonksiyonun kendisinin iyi tanımlanmış bir değeri olmamakla birlikte, bir integrandda bir çarpan olarak ortaya çıktığında integralin iyi tanımlanmış bir değeri vardır. Kuantum teorisinde, ne zaman ki bir uygunsuz fonksiyon ortaya çıkarsa, bu sonuç olarak bir integrandın içinde kullanılacaktır. Bu nedenle, teoriyi tüm uygunsuz fonksiyonları integrandların içinde olacak biçimde yazmak mümkün olmalıdır. Böylece uygunsuz fonksiyonlar tümden bertaraf edilebilir. Uygunsuz fonksiyonların kullanımı bu nedenle teorideki herhangi bir ihtimam eksikliğinden kaynaklanmayıp, bir kısım ilişkileri özlü bir biçimde yazmamızı olanaklı kılan kullanışlı bir notasyondur. Eğer bu ilişkileri uygunsuz fonksiyonları kullanmadan yeniden yazmamız gerekirse bu mümkündür, fakat bu da tartışmayı anlaşılmaz bir hale getirerek hantal bir biçime dönüştürebilir.

δ fonksiyonunu tanımlamanın bir başka yolu,

$$\epsilon(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases} \qquad (4)$$

şeklinde tanımlanan $\epsilon(x)$ fonksiyonunun diferansiyel katsayısı $\epsilon'(x)$ olarak almaktır. Bunun bir önceki tanımla özdeş olduğunu (3)'ün sol tarafında $\delta(x)$ yerine $\epsilon'(x)$ koyup kısmi integrasyon yaparak doğrulayabiliriz. g_1 ve g_2 iki pozitif sayı ise

$$\int_{-g_2}^{g_1} f(x)\epsilon'(x)\mathrm{d}x$$

$$= \left[f(x)\epsilon(x)\right]_{-g_2}^{g_1} - \int_{-g_2}^{g_1} f'(x)\epsilon(x)\mathrm{d}x$$

$$= f(g_1) - \int_{0}^{g_1} f'(x)\mathrm{d}x$$

$$= f(0)$$

elde edilir, ki bu da (2) ile uyumludur. Süreksiz bir fonksiyonun türevini aldığımız her durumda karşımıza δ fonksiyonu çıkar.

Bu uzun alıntıdan görüldüğü gibi, Dirac olağanüstü önsezisiyle δ fonksiyonuna atfedilebilecek en önemli özellikleri matematiksel olarak titiz bir dil kullanmadan ifade etmeye çalışıyor, fakat daha ötesine gidememiştir.

Daha da çarpıcı olan bir olgu varsa o da Dirac fonksiyonuyla benzer özellikleri içeren bir fonksiyonun çok daha önceden Heaviside tarafından kullanılmış olması! Görülen o ki, Dirac'ın Heaviside'ın bu çalışmasından haberi yok:

Eğer y'nin sürekli bir fonksiyonunu, $f(y)$ diyelim, u ile gösterilen ve sadece $y = x$ noktasında varolan bir impuls fonksiyonuyla çarparsak, çarpım açıktır, o noktanın dışında her yerde sıfırdır, ve o noktada da sonsuzdur. Fakat eğer biz $u \cdot f(y)$'nin uzaydaki toplamını alırsak sonuç $f(x)$'tir. Çünkü u sadece x noktasında vardır, ve toplamı da 1'dir. Bu nedenle eğer limitler x noktasını içeriyorsa

$$\int uf(y)\mathrm{d}y = f(x)$$

elde edilir. Aksi takdirde sonuç sıfırdır.[H2, sayfa 93]

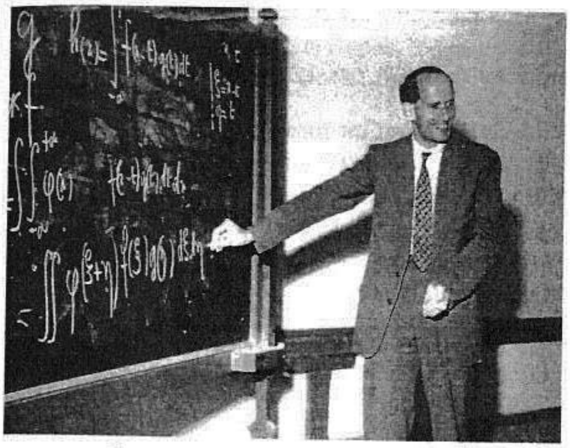
IV) 20. Yüzyıl ve Laurent Schwartz

1940'lı yılların başlarına geldiğimizde Laurent Schwartz'ın Heaviside'ın yukarıda sözünü ettiğimiz, *Proceedings of the Royal Society*'de yayımlandıktan sonra derginin sayfalarının kendisine yasaklandığı iki makalesini, Dirac'ın kitabını ve Dirac fonksiyonunu kullandığı makaleyi dikkatle okuduğu, ve yazdıklarından etkilenip (3) denklemindeki integrale matematiksel olarak uygun bir anlam vermeye çalıştığı aşikardır. Giriş bölümünde sözünü ettiğimiz "Théorie des Distributions" kitabının genişletilmiş 2. baskısına giriş bölümünde şöyle diyor:

50 yıldan fazla bir zaman var ki mühendis Heaviside sembolik hesabının kurallarını, fizik problemlerinin çözümünde çok zor savunulabilir matematiksel hesapların bulunduğu gözüpek bir makalesinde sunuyordu. Bu sembolik ya da operasyonel hesap o zamandan beri hiç durmadan gelişti, ve bugün elektrikçilerin çalışmalarına temel oluşturuyor. Mühendisler bunu sistematik olarak, herbiri kendi anladığı biçimiyle ve vicdanı iyi kötü sarih olarak kullanıyorlardır. Giderek "pek ihtimamlı değil ama gayet başarılı" bir teknik olmuştur. Dirac meşhur $\delta(x)$ fonksiyonunu öne sürdüğünden beri, ki bu fonksiyon $x = 0$ dışında her yerde sıfırdır, ve $x = 0$'da sonsuzdur öyle ki

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\mathrm{d}x = 1$$

sağlayan, sembolik hesabın formülleri matematikçilerin ihtimamı açısından giderek daha da kabul edilemez olmuşlardır. $x < 0$ için 0'a eşit, ve $x \geq 0$ için 1'e eşit $Y(x)$ Heaviside fonksiyonunun türevinin, tanımı bile matematiksel olarak çelişkili *olan Dirac $\delta(x)$ fonksiyonuna eşit olduğunu yazmak, ve bu fonksiyonun gerçel varlıktan yoksun olan $\delta'(x), \delta''(x)\ldots$ türevlerinden söz etmek, işte bu bize tanınan sınırları aşmaktır. Bu yöntemlerin başarısı nasıl açıklanır? Böyle çelişkili bir durum ortaya çıktığında, fizikçilerin kullandığı dilin, değişik bir biçimde de olsa, yeni bir matematiksel teoriyle doğrulanmasıyla sonuçlanması son derece nadirdir; hatta burada matematiğin ve fiziğin gelişmesi için önemli bir kaynak vardır.*[S, sayfa 3-4]



Laurent Schwartz (1915-2002)

Laurent Schwartz'ın distribüsyon kavramını matematiksel temellere oturttuğu ilk makalesi 1944 yılında yayınlandı. Ardından yazdığı makalelerde fonksiyon kavramının genelleştirilmesini iki aşamada sundu: İlkinde fonksiyonu ölçü kavramıyla, ardından da ölçü kavramını da distribüsyon kavramıyla genelleştirdi. Bu genelleştirmenin sonucunda fonksiyonlar kümesi distribüsyonlar kümesine genişletilmiş oldu: Böylece her fonksiyon belirli bir distribüsyon olarak ele alınabilir, ancak her distribüsyon bir fonksiyon olarak ele alınamaz. Distribüsyonlar teorisinde türevin özel bir konumu vardır. Tanımı öyle olmalıdır ki normal olarak türevlenemeyen bir fonksiyonun, distribüsyon olarak ele alındığında her zaman türevi olur, fakat bu türev de artık bir fonksiyon değil, distribüsyondur. Bu nedenledir ki distribüsyonlar günümüzde diferansiyel hesapta yaygın biçimde kullanılmaktadırlar, çünkü her zaman klasik anlamda olmasa bile distribüsyonel anlamda türevlenebilirler. Dolayısıyla diferansiyel hesapta bir problemin çözümü distribüsyon olarak elde edildiğinde bu distribüsyonun bir fonksiyon olarak ele alınıp alınamayacağını araştırmak da konuyla ilgilenenlerin üzerinde yoğunlaştığı bir uğraştır.

Laurent Schwartz'ın geliştirdiği teoride distribüsyonlar uygun fonksiyon uzaylarında (ki bunlara test fonksiyonu uzayı diyoruz) tanımlanmış lineer sürekli fonksiyonellerdir. "Uygun" sıfatından, örneğin sonsuz kez türevlenebilir, ayrıca tıkız bir kümenin dışında kendi ve tüm türevleri sıfır olan ya da argümanı sonsuza giderken kendi ve tüm türevleri de hızla sıfıra giden fonksiyonları anlıyoruz. Bu uzayların yapılarına göre distribüsyonları içeren düal uzaylar da belli özellikleri içerirler, örneğin Fourier analizine kimileri daha uygun olur.

Örnek olarak, f bir test fonksiyonu, T de f'nin ait olduğu uzayda tanımlanmış bir distribüsyon olsun. T'nin f üzerine uygulanmasının sonucunu şu şekilde yazabiliriz:

$$T(f) = < T, f > := \int_{-\infty}^{+\infty} T(x) f(x) \mathrm{d}x.$$

Görüldüğü gibi, sanki T'nin f üzerinden "averajını" alıyormuşuz gibi bir ifadeyle karşı karşıyayız. T'nin lineer bir fonksiyonel olduğu açık. Sürekli olduğunu ise f'nin ait olduğu uzayın topolojisini de işe katarak kanıtlamak gerekiyor.

Yukarıda tanımladığımız $< T, f >$ ifadesine bakarak T'nin neden sonsuz türevlenebileceğini anlayabiliriz: f test fonksiyonu olarak sonsuz kez türevlenebileceğinden kısmî integrasyon vasıtasıyla şu eşitliği hemen yazmamız mümkün:

$$\begin{aligned}
< T', f > &= \int_{-\infty}^{+\infty} T'(x) f(x) \mathrm{d}x \\
&= \left[T(x) f(x)\right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} T(x) f'(x) \mathrm{d}x \\
&= - < T, f' >, \\
&\vdots \\
< T^{(n)}, f > &= (-1)^n < T, f^{(n)} > .
\end{aligned}$$

Sınır terimleri tabii ki test fonksiyonu sonsuzda sıfır olduğundan hiçbir katkıda bulunmuyorlar. Dirac distribüsyonunu şu şekilde tanımlayabiliriz:

$$\delta(f) = < \delta, f > := \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) f(x) \mathrm{d}x = f(0)$$

Hatırlayacağımız gibi, Dirac'ın "improper" fonksiyon dediği ve bugün kendi adıyla andığımız distribüsyonun ancak integral işareti altında tanımlanabildiği ve kendi başına bir ifade etmediği gerçeğinin Laurent Schwartz matematiksel olarak bu şekilde kabul edilmesini sağlıyor.

Yine benzer hesaplarla, Heaviside fonksiyonunun distribüsyonel türevinin Dirac distribüsyonu olduğunu kolayca gösterebiliriz. Uygun bir test fonksiyonu uzayında herhangi bir f fonksiyonu için:

$$\begin{aligned} < H', f >: &= \int_{-\infty}^{+\infty} H'(x)f(x)\mathrm{d}x \\ &= \left[H(x)f(x)\right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{0}^{+\infty} f'(x)\mathrm{d}x \\ &= f(0) = < \delta, f > \Leftrightarrow H' \overset{\text{dist.}}{=} \delta \end{aligned}$$

Yine Dirac'ın anlatımından kalkarak bir fonksiyon dizisinin de distribüsyonel anlamda limitinin Dirac distribüsyonu olduğunu göstermek mümkün:

$\mathbb{N}^*$ sıfırdan farklı doğal sayılar için, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ bir pozitif fonksiyon dizisi olsun, öyle ki

- $\operatorname{supp}(f_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \{0\}$
- $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = 1$

koşullarını sağlasınlar. $n \to \infty$ için $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ dizisinin distibüsyonel anlamda Dirac distribüsyonuna yakınsayacağını göstermek istiyoruz; diğer bir deyişle

$$n \to \infty \text{ için } f_n \overset{\mathfrak{D}'}{\longrightarrow} \delta.$$

$\varphi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R})$, her $n \in \mathbb{N}^*$ için $\operatorname{supp}(\varphi) \cap \operatorname{supp}(f_n) \neq \emptyset$ koşulunu sağlayan bir test fonksiyonu olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\varphi(x)\mathrm{d}x - \varphi(0) \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\varphi(x)\mathrm{d}x - \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\varphi(0)\mathrm{d}x \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\left[\varphi(x) - \varphi(0)\right]\mathrm{d}x \end{aligned}$$

yazabiliriz. Son eşitliğin sağındaki integralin mutlak değerini alırsak

$$\begin{aligned} &\left|\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\left[\varphi(x) - \varphi(0)\right]\mathrm{d}x\right| \\ &\leq \sup_{x\in\operatorname{supp} f_n} \left|\varphi(x) - \varphi(0)\right| \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x \\ &\Longrightarrow \left|\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\left[\varphi(x) - \varphi(0)\right]\mathrm{d}x\right| = 0 \end{aligned}$$

buluruz, çünkü

i) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1;$

ii) $\displaystyle\sup_{x\in\operatorname{supp} f_n} \left|\varphi(x) - \varphi(0)\right| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

çünkü $\operatorname{supp}(f_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \{0\}$

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = \varphi(0) \\ &\Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} < f_n, \varphi > = \varphi(0) = < \delta, \varphi > \forall\varphi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}) \\ &\Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} f_n \underset{\mathfrak{D}'}{=} \delta. \end{aligned}$$

Bu verdiğimiz örnek, aslında yukarıda Dirac'ın kitabından yaptığımız uzun alıntıda kendisinin ϵ argümanıyla nasıl δ distribüsyonuna limit işlemiyle varılabileceğini, distribüsyonların kendi dilinde nasıl kanıtlanabileceğini gösteriyor.

Bir diğer örneği de fonksiyonlar dizisi olarak Gauss dağılımlarını alarak verebiliriz: $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$,

$$f_n(x) := n \cdot e^{-\pi n^2 x^2}$$

ifadesiyle verilen bir fonsiyon dizisi olsun. Bu fonksiyon dizisinin, n sonsuza gittiğinde, distribüsyonel anlamda, δ distribüsyonuna yakınsayacağını göstermek istiyoruz. Test fonksiyonlarımızı yine $\mathfrak{D}(\mathbb{R})$ uzayından seçelim, ve $\operatorname{supp}(\varphi) \subset K$ olsun. Kanıtlamak istediğimiz ise

$$\lim_{n\to\infty} \left|< f_n, \varphi > - < \delta, \varphi >\right| = 0$$

eşitliği. Burada

$$\begin{aligned} < f_n, \varphi > &= n \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 x^2} \varphi(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t^2} \varphi\left(\frac{t}{n}\right)\mathrm{d}t \end{aligned}$$

yazabiliriz. Bu nedenle

$$\begin{aligned} &\left|< f_n, \varphi > - < \delta, \varphi >\right| \\ &= \left|\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t^2} \varphi\left(\frac{t}{n}\right)\mathrm{d}t - \varphi(0)\right| \\ &= \left|\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t^2} \varphi\left(\frac{t}{n}\right)\mathrm{d}t - \varphi(0) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t^2}\mathrm{d}t\right| \\ &= \left|\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t^2} \left[\varphi\left(\frac{t}{n}\right) - \varphi(0)\right]\mathrm{d}t\right| \\ &= \left|\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t^2} \frac{t}{n} \varphi'(c_t)\mathrm{d}t\right| \quad c_t \in \left]0, \frac{t}{n}\right[\text{ (Ort. değ. teo.)} \\ &\leq \frac{1}{n} \sup\left|\varphi'(c_t)\right| \int_{-\infty}^{+\infty} |t| e^{-\pi t^2} dt \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

$\operatorname{supp}(\varphi') \subset K$ olduğundan $\sup|\varphi'(c_t)| < \infty$, integral da sonlu olduğundan eşitsizliğin n sonsuza giderken sıfıra gideceği açıktır.

Böylece

$$\lim_{n\to\infty} f_n \underset{\mathfrak{D}'}{=} \delta$$

olduğunu kanıtlamış olduk.

Konuyla ilgili daha ayrıntılı bilgi için okuyucuya yazının hazırlanışında yararlanmış olduğumuz kitap ve makalelerden oluşan kaynakçadaki eserlere başvurmalarını önererek yazımızı bitirelim.

Teşekkür: Yazının hazırlanmasında temel kaynaklardan biri olan Lützen'in kitabını [L1] bulabilmemde hızır gibi yetişip çağdaş teknolojiyi kullanarak eski bildik yöntemlere oranla ne kadar çabuk ve verimli bir biçimde kaynaklara ulaşabileceğimi bana hatırlatan Alp Bassa'ya ne kadar teşekkür etsem azdır.

Kaynakça:

[B] N. Boccara, *Distributions*, Ellipses, 1997, Paris.

[D1] P.A.M.Dirac, *The Principles of Quantum Mechanics*, Oxford University Press, revised 4th edition, 1967.

[D2] P.A.M. Dirac, *The physical interpretation of the quantum dynamics*, Proc. of the Royal Society, London, section A, 113(1926-27), s. 621-641.

[F] G. Farmelo, *Paul Dirac*, İş Bankası Yayınları, 2014.

[H1] O. Heaviside, *Electromagnetic Theory*, Cilt 1, Londra, 1893.

[H2] O. Heaviside, *Electromagnetic Theory*, Cilt 2, Londra, 1899.

[H3] O. Heaviside, *On Operators in Mathematical Physics*, Proc. of the Royal Society, 52, 504-529 , 1893 ve 54, 105-143, 1894.

[L1] J. Lützen, *The Prehistory of the Theory of Distributions*, Springer-Verlag, 1982, Berlin.

[L2] J. Lützen, *Heaviside's Operational Calculus and the Attempts to Rigorise It*, Archive for History of Exact Sciences 21(1979), s. 161-200.

[S] L. Schwartz, *Théorie des Distributions*, Hermann, 1966, Paris.

[S1] L. Schwartz, *Sur certaines familles non fondamentales de fonctions continues*, Bull. Soc. Math. France, 72(1944), s. 141-145.

[S2] L. Schwartz, *Généralisation de la notion de fonction, de dérivation, de transformation de Fourier, et applications mathématiques et physiques*, Annales Univ. Grenoble, 21(1945), s. 57-74.

[S3] L. Schwartz, *Théorie des distributions et transformation de Fourier*, Annales Univ. Grenoble, 23(1947-48), s.7-24.

[S4] L. Schwartz, *Un mathématicien aux prises avec le siècle*, Editions Odile Jacob, 1997, Paris.

[S5] L. Schwartz, *Mathematical Methods for Physical Sciences*, Dover Publications, 2011.

[So] S. Sobolev, *New method to solve Cauchy's Problem for the hyperbolic normal equations*, Math. Sbornik 1, 1935, s. 39-71.

[St] R. Strichartz, *A Guide to Distribution Theory and Fourier Transforms*, World Scientific, 1994.

Nesin Matematik Köyü'nde Matematiksel Fizik Yaz Okulu:
22 Ağustos-4 Eylül 2016

Bu yaz NMK matematiksel fizik alanında iki hafta boyunca yoğun bir programı içeren yaz okuluna ev sahipliği yapacak. Amaçlanan, gerek Türkiye'den gerekse yurt dışından katılacak 40 kadar öğrenciye matematiksel istatistiksel mekaniğin bugünlerde yoğun araştırma yapılan bölümlerini, bu alanda dünyaca otorite olarak tanınan uzmanlar aracılığıyla derinliğine incelemek, ve katılımcıları bu konularda araştırma yapmaya teşvik etmek. Derslerin konuları ve hocaları şu şekilde:

"Metastability": Anton Bovier (University of Bonn, Almanya), Frank den Hollander (Leiden University, Hollanda);

"Critical Phenomena and Renormalisation Group": David Brydges (Emeritus, University of British Columbia, Kanada), Gordon Slade (University of British Columbia, Kanada);

"Renewal Structures in (Lattice) Models of Statistical Mechanics": Dmitry Ioffe (Technion, Haifa, İsrail), Yvan Velenik (University of Geneva, İsviçre)

Her ders toplam 18 saat süreceğinden katılımcı öğrencilere oldukça ayrıntılı bir sunum yapılması hedeflenmektedir. Katılacak öğrencilerin Yüksek Lisans ya da Doktora öğrencileri düzeyinde olmaları, ileri düzeyde olasılık teorisi bilmeleri onların bu yaz okulundan yararlanmalarına yardımcı olacaktır. Günde üç adet 90 dakikalık dersin dışında, akşamları arzu eden öğrencilerin araştırma yaptıkları konuda en fazla 30 dakikalık bir sunum yapmaları teşvik edilecektir. Ayrıca derslerin içeriği ve önkoşulları da hocalar tarafından belirtilmektedir. Bu konuda ayrıntılı bilgi yazokulunun aşağıdaki web sayfasından edinilebilir:

`https://matematikkoyu.org/eng/events/2016-fizik/program.php`

Yaz okuluna kayıt süreci başlamış olup Mart ayının sonuna kadar devam edecektir. Katılmayı arzulayan öğrenciler arasında okul ücretini ödemekte zorluk çekecek öğrencilerden en fazla 10 tanesine Nesin Matematik Köyü kısmî burs vermektedir. Daha ayrıntılı bilgi için yukardaki web sayfasında adları ve email adresleri verilen düzenleme komitesi üyeleriyle temasa geçilebilir.

YIL 24 SAYI 103

Matematik Dünyası

"Aşk ve Matematik"

Alman Tank Problemi

Buffon İğne Problemi

Sylvester-Gallai Teoremi

Knaster-Tarski Teoremi

Dina Belenko ile Söyleşi

Putnam Matematik Yarışması

Şeytanın Satranç Tahtası

Topolojilerin Sayısı

Distribüsyonlar

Sezgicilik

Kapak Konusu:

Kümeler Kuramı

9 771300 624012

7.50 TL