

İKİLİ PENCERELEME YÖNTEMİ İLE GİRİŞİM ETKİSİNDEKİ SİNÜSOİDAL İŞARETİN TESPİTİ

DUAL APODIZATION IN THE DETECTION OF A SINUSOIDAL SIGNAL UNDER THE EFFECT OF INTERFERENCE

Burak Balci

Aselsan
bbalci@aselsan.com.tr

Çağatay Candan

Elektrik ve Elektronik Mühendisliği Bölümü
Orta Doğu Teknik Üniversitesi
ccandan@metu.edu.tr

ÖZETÇE

Sinüsoidal bir girişim işaretinin varlığı yarattığı yan kulaklar sebebiyle başka bir sinüsoidal işaretin tespitini engelleyebilir. Klasik pencereleme yöntemleri kullanılarak girişim sinyalinin oluşturduğu yan kulaklar bastırılabilir. Ancak yan kulak bastırma işlemi sırasında frekans çözünürlüğünde azalma meydana gelmektedir. Uzamsal Değişken Pencereleme (SVA) yöntemi ile çok sayıda pencere fonksiyonu kullanılarak yan kulak azaltımı, frekans çözünürlüğünü kaybı yaşamadan yapılmaktedir. İkili pencereleme (DA) yöntemi, SVA'ya göre daha basit bir şekilde iki pencere fonksiyonu kullanılarak gerçeklenmekte ve SVA'ya yakın bir performans ile çalışmaktadır. Bu çalışmada SVA ve ikili pencereleme yöntemleri, sinüsoidal girişim altındaki sinüsoidal bir sinyalin tespiti problemine uyarlanmıştır. İkili pencereleme yöntemi için olasılık dağılım fonksiyonu bulunarak kuramsal eşik değeri hesaplamaları verilmiştir. İkili pencereleme, klasik pencereleme ve Uzamsal Değişken Pencereleme yöntemleri arasında tespit başarımı karşılaştırımları verilmiştir. Yapılan benzetimler, İkili Pencereleme ve SVA yöntemlerinin, klasik pencerelemlerden daha iştün olduğunu göstermiştir.

ABSTRACT

Presence of a sinusoidal interference signal can inhibit the detection of another sinusoidal signal because of its sidelobes. By the use of conventional window functions, sidelobes can be suppressed with the price of frequency resolution loss. Spatially variant apodization (SVA), which uses an infinite number of window functions, can reduce spectral leakage by preserving the frequency resolution of the unwindowed signal. Dual apodization (DA) is a simple version of SVA, in which only two window functions are used. In this work SVA and DA methods are applied to the problem of detection of a sinusoidal signal under sinusoidal interference. The probability density function for DA output is presented and the theoretical threshold calculation is given. Detection performance comparisons between DA, SVA and conventional windows are given. By the help of the simulations, it is shown that SVA and DA methods outperform the conventional windows.

1. GİRİŞ

Gürültü etkisi altındaki sinüsoidal işaretin tespiti klasik bir istatistiksel işaret işleme problemidir. İşaret toplanır beyaz Gauss gürültü altında inceleniyorsa ayrık Fourier dönüşümünün (DFT) en iyi tespit sonucunu verdiği bilinmektedir, [1]. Eğer gürültü renkliyse, en iyi sonuç beyazlatılmış uyumlu süzeğe ile elde edilmektedir, [1]. Bu çalışmada çeşitli saptayıcların bir sinüsoidal işaretin etkisi altındayken gösterdikleri tespit performansı incelenmektedir.

Tespit edilmek istenen işaretin mevcut olmadığı (H_0) ve mevcut olduğu (H_1) durumlarda giriş işaretin şu şekilde tanımlanabilir:

$$\begin{aligned} H_0 : \mathbf{r} &= \alpha_i \mathbf{s}_i + \mathbf{n} \\ H_1 : \mathbf{r} &= \alpha_t \mathbf{s}_t + \alpha_i \mathbf{s}_i + \mathbf{n} \end{aligned} \quad (1)$$

Giriş işaretin \mathbf{r} , $N \times 1$ boyutunda bir kolon vektördür. Girişim işaretin, hedef işaretin ve gürültü işaretin sırasıyla \mathbf{s}_i , \mathbf{s}_t ve \mathbf{n} ile gösterilmektedir. Hedef ve girişim işaretleri birim büyülüklükte üstel fonksiyonlar olarak kabul edilmektedirler, $s_i[n] = e^{j\omega_i n}$ ve $s_t[n] = e^{j\omega_t n}$. α_i ve α_t katsayıları, sıfır ortalama değer ve sırasıyla $\sigma_{\alpha_i}^2$ ve $\sigma_{\alpha_t}^2$ değişinti değerleri ile karmaşık Gaussian dağılıma sahip rastgele değişkenlerdir. Gürültü işaretin \mathbf{n} , sıfır ortalama ve $\sigma_n^2 \mathbf{I}$ ortak değişinti matrisine sahip, karmaşık Gaussian dağılımında bir rastgele değişkendir. \mathbf{I} , $N \times N$ birim matrisini göstermektedir. Bu çalışmada sinüsoidal girişim işaretin parametreleri σ_i^2 ve ω_i 'nın bilindiği varsayılmaktadır.

Sinüsoidal işaretlerin tespiti ve parametrelerinin kestirilmesi literatürde çokça araştırılan bir konudur, [2],[3],[4],[5]. Girişim işaretinin tespit performansına etkisi pencereleme işlemi uygulanarak azaltılabilir. Bu işlem için birçok çalışmada Hamming penceresi gibi sabit bir pencere fonksiyonu kullanılmaktadır. Pencere fonksiyonları girişim işaretinin yan kulaklarının etkisini azaltmakta ancak bunun yanı sıra frekans çözünürlüğünü de azaltmaktadır. Ayrıca pencereleme işleminin dikdörtgensel pencereye göre SNR (işaret gürültü oranı) kaybına yol açtığı da bilinmektedir, [6].

Pencerelemeye dayalı yöntemlerden SVA, karmaşık üstel işaretlerin parametrelerinin kestiriminde başarılı bir şekilde kullanılmıştır, [7, 8]. SVA, çok sayıda pencere fonksiyonu kullanarak ana lob genişliğinde herhangi bir artışa neden olmadan yan kulakların bastırılmasını sağlamaktadır. Literatürde yapılan araştırmalarda, SVA yönteminin spektrum kestirimi

icin kullanılmış olduğu ancak tespit problemindeki performans incelemesinin yapılmadığı görülmüştür. Bu çalışmanın amaçlarından biri de SVA yönteminin tespit problemine uyarlanması sağlamaktır.

SVA yönteminde, yapılan bir en iyileme işlemi ile kullanılacak pencere fonksiyonu seçilmektedir. Bu seçim, eşik değeri hesabını karmaşık hale getirmektedir. Bu çalışmada SVA'nın basit bir çeşidi olan ikili pencereleme yöntemi de incelenmektedir. İkili pencereleme sadece iki pencere kullanılarak gerçekleşmekte ve tespit performansı kuramsal olarak hesaplanabilmektedir.

Önerilen saptayıcılar, tespit performansı açısından optimal saptayıcı ile karşılaşacaktır. Optimal saptayıcı, kestircisi en küçük ortalama karesel kestirici olan bir kestirici-iliintili alıcı olarak düşünülebilir. Optimal saptayıcı, verilen bir sabit yanlış alarm olasılığına karşılık olarak hesaplanan tespit olasılığı için bir üst limit değeri vermektedir. Optimal saptayıcı, pencereleme tabanlı saptayıcılar ile karşılaştırma amaçlı olarak kullanılacaktır.

2. SAPTAYICILAR

Sinusoidal işaretlerin tespiti probleminde klasik yaklaşım, tespit işleminin DFT hesabı ile yapılmalıdır. İlgilenilen DFT noktasında gözlenen değer Y_k , H_0 hipotezinde gürültü ve girişim işaretinin o frekanstaki DFT'lerinin toplamına eşittir. Gürültü işaret ve girişim işaret sifir ortalamalı rastgele değişkenlerdir. Bu durumda Y_k sifir ortalamalı iki Gaussian rastgele değişkenin toplamından oluştuğu için sifir ortalamalı Gaussian bir rastgele değişkendir.

Benzer şekilde H_1 hipotezi altında ilgilenilen DFT noktasında gözlenen değer gürültü, girişim ve hedef işaretlerinin o frekanstaki DFT'lerinin toplamına eşittir. Hedef işaretinin büyülüüğü, $\sigma_{\alpha_t}^2$, sifir ortalamalı Gaussian rastgele değişken olarak tanımlandığı için Y_k , üç Gaussian rastgele değişkenin toplamından oluşan sifir ortalamalı bir Gaussian rastgele değişkendir. Bu çalışmada alan kısıtlarından dolayı olasılık dağılımları için hesaplamalar ayrıntılı olarak verilmemiştir. Ayrıntılı hesaplamalar için [9] incelenebilir.

2.1. İkili Pencereleme ile DFT Saptayıcı

Alınan işaret $r[n]$, $w_1[n]$ ve $w_2[n]$ pencereleri ile pencerenir:

$$x_1[n] = w_1[n]r[n] \quad (2)$$

$$x_2[n] = w_2[n]r[n] \quad (3)$$

Sonra pencerenmiş fonksiyonların DFT'sinin büyülüklüklerine bakılır. Her frekans için en küçük değer seçilir:

$$Y(k) = \min(|X_1(k)|, |X_2(k)|) \quad (4)$$

İkili pencereleme için H_0 hipotezi altında yanlış alarm olasılığı şu şekilde hesaplanır:

$$\begin{aligned} P_{FA} &= P\{Y(k) > \gamma; H_0\} \\ &= 1 - F_{R_1}(\gamma) - F_{R_2}(\gamma) + F_{R_1 R_2}(\gamma, \gamma) \end{aligned} \quad (5)$$

burada $F_R(x)$, Rayleigh olasılık dağılım fonksiyonunu, γ da eşik değerini ifade etmektedir. Rayleigh olasılık dağılım fonksiyonu şu şekilde tanımlanabilir, [10]:

$$F_R(x) = 1 - 2Q\left(\frac{x}{\sigma_x}\right) \quad (6)$$

ve $Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty \exp(-\frac{u^2}{2}) du$. İki değişkenli Rayleigh dağılımı aşağıdaki gibi tanımlanmıştır [10]:

$$\begin{aligned} f_{R_1, R_2}(x_1, x_2) &= \frac{x_1 x_2}{\sigma_{x_1}^2 \sigma_{x_2}^2 (1 - \rho^2)} \exp\left[-\frac{1}{2(1 - \rho^2)}\right. \\ &\quad \left.\left(\frac{x_1^2}{\sigma_{x_1}^2} + \frac{x_2^2}{\sigma_{x_2}^2}\right)\right] I_0\left(\frac{x_1 x_2 |\rho|}{\sigma_1 \sigma_2 (1 - \rho^2)}\right) \end{aligned} \quad (7)$$

I_0 , 0. dereceden birinci tip değiştirilmiş Bessel fonksiyonunu göstermektedir. X_k degerinin ω_t frekansındaki değişinti değeri:

$$\sigma_{X_k, H_0}^2 = \frac{\sigma_n^2}{2} \left| \sum_{n=0}^{N-1} w_k[n] e^{-j\omega_t n} \right|^2 + \frac{\sigma_{\alpha_i}^2}{2} \left| \sum_{n=0}^{N-1} w_k[n] e^{j(\omega_i - \omega_t) n} \right|^2 \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \rho_{H_0} &= \frac{1}{\sigma_{x_1, H_0} \sigma_{x_2, H_0}} \left(\sigma_{\alpha_i}^2 \sum_{n=0}^{N-1} w_2[n] e^{j(\omega_i - \omega_t) n} \right. \\ &\quad \left. \sum_{n=0}^{N-1} w_1[n] e^{-j(\omega_i - \omega_t) n} + \sigma_n^2 \sum_{n=0}^{N-1} w_1[n] w_2[n] \right) \end{aligned} \quad (9)$$

Benzer şekilde tespit olasılığı, H_1 hipotezi altında (5) eşitliğini kullanarak hesaplanabilir. Bu durumda ω_t frekansındaki değişinti değerleri:

$$\begin{aligned} \sigma_{X_k, H_1}^2 &= \frac{\sigma_n^2}{2} \left| \sum_{n=0}^{N-1} w_k[n] e^{-j\omega_t n} \right|^2 + \frac{\sigma_{\alpha_i}^2}{2} \left| \sum_{n=0}^{N-1} w_k[n] e^{j(\omega_i - \omega_t) n} \right|^2 \\ &\quad + \frac{\sigma_{\alpha_t}^2}{2} \left| \sum_{n=0}^{N-1} w_k[n] \right|^2 \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \rho \sigma_{x_1} \sigma_{x_2} &= \sigma_{\alpha_i}^2 \sum_{n=0}^{N-1} w_2[n] e^{j(\omega_i - \omega_t) n} \sum_{n=0}^{N-1} w_1[n] e^{-j(\omega_i - \omega_t) n} + \\ &\quad \sigma_n^2 \sum_{n=0}^{N-1} w_1[n] w_2[n] + \sigma_{\alpha_t}^2 \prod_{k=1}^2 \sum_{n=0}^{N-1} w_k[n] \end{aligned} \quad (11)$$

2.2. Pencerenmiş DFT

Pencerenmiş işaret $y[n] = w[n]r[n]$ olarak tanımlanabilir. $w[n]$, kullanılan pencere fonksiyonunu ifade etmektedir. Herhangi bir frekanstaki güç spektrum dağılımı, P_k , işaretin o frekanstaki DFT'sinin karesi olarak tanımlanabilir. H_0 hipotezi altında pencerenmiş işaretin DFT'si, Y_k , Gaussian rastgele değişken olduğu için $|Y_k|^2$ ki-kare dağılıma sahiptir. Bu nedenle yanlış alarm olasılığı şu şekilde hesaplanır:

$$\begin{aligned} P_{FA} &= P\{P_k > \gamma; H_0\} = 1 - F_{P_k}(\gamma; H_0) \\ &= 1 - F_{\chi_2}(\frac{\gamma}{\sigma_Y^2}) \end{aligned} \quad (12)$$

Burada F_{χ_2} ki-kare dağılımını ifade etmektedir. Değişinti değeri aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\sigma_Y^2 = \frac{\sigma_{\alpha_t}^2}{2} \left| \sum_{n=0}^{N-1} w[n] e^{j\omega_t n} e^{-j\omega_t n} \right|^2 + \frac{\sigma_n^2}{2} \left| \sum_{n=0}^{N-1} w[n] e^{-j\omega_t n} \right|^2 \quad (13)$$

Benzer şekilde tespit olasılığı, H_1 hipotezi altında hesaplanabilir:

$$P_D = P\{P_k > \gamma; H_1\} = 1 - F_{\chi_2}(\frac{\gamma}{\sigma_Y^2}; H_1) \quad (14)$$

H_1 hipotezi altında değişinti değeri şu şekilde tanımlanabilir:

$$\sigma_Y^2 = \frac{\sigma_{\alpha_t}^2}{2} \left| \sum_{n=0}^{N-1} w[n] \right|^2 + \frac{\sigma_{\alpha_i}^2}{2} \left| \sum_{n=0}^{N-1} w[n] e^{j\omega_i n} e^{-j\omega_t n} \right|^2 + \frac{\sigma_n^2}{2} \left| \sum_{n=0}^{N-1} w[n] e^{-j\omega_t n} \right|^2 \quad (15)$$

2.3. Uzamsal Değişken Pencereleme ile Tespit

SVA, kaldırılmış kosinüs pencereleri kullanır:

$$w_\beta[n] = 1 - 2\beta \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right) \quad (16)$$

β parametresi 0 ve 0.5 arasında değişen değerler alabilir. Kullanılan pencere fonksiyonu, $\beta = 0$ olduğunda dikdörtgensel pencere, $\beta = 0.5$ olduğunda Hann penceresidir. Böylece β 'nın ara değerleri için farklı yan kulak bastırma seviyelerine sahip değişik pencereler kullanılmış olur. Pencerelenmiş işaret, $y[n] = w_\beta[n]r[n]$ olarak bulunur. Pencerelenmiş işaretin KN kat hızda örneklenmiş DFT'si şu şekilde bulunur:

$$Y(k) = R(k) - \beta(k)[R(k-K) + R(k+K)] \quad (17)$$

[7], $\beta_0(k)$ parametresinin aşağıdaki şekilde bulunabileceğini göstermiştir:

$$\beta_0(k) = \operatorname{Re} \left\{ \frac{X(k)}{X(k-K) + X(k+K)} \right\} \quad (18)$$

optimal β değeri veriye ve frekansa bağlıdır. Eğer $\beta_0[k] \in [0, 0.5]$ aralığının dışında bir değer olarak hesaplanırsa en yakın sınır değeri alınır. SVA algoritması aşağıdaki gibi özetlenebilir:

1. $k, k+K$ ve $k-K$ noktalarındaki DFT değerleri hesaplanır.
2. (18) kullanılarak $\beta_0(k)$ hesaplanır.
3. $\beta_0(k), [0, 0.5]$ aralığında değilse $\beta_0(k)$ en yakın sınır değere eşitlenir. (0 ya da 0.5)
4. (17) kullanılarak SVA çıkış değeri, Y_k hesaplanır.
5. SVA çıkış değerinin büyüklüğünün karesi bulunur.

$\beta_0(k)$ için olasılık dağılımı fonksiyonu bulunamadığı için yanlış alarm ve tespit olasılıklarının kuramsal hesaplamaları yapılamamaktadır. Bu sebeple SVA tespit başarımı incelemesi için Monte-Carlo benzetimleri kullanılmıştır.

2.4. Optimal Sapayıcı

Eğer girişim işaretini ile ilgili ön bilgi mevcutsa bu bilgi kullanılarak SINR (İşaret Girişim ve Gürültü oranı) bakımından optimal bir süzgeç elde edilebilir. Alınan r işaretinin h süzgeciyle doğrusal birlleşimi $y = h^H r$ şeklinde ifade edilebilir. Süzgeç çıkışındaki SINR aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$\text{SINR} = \frac{\text{İşaret Gücü}}{\text{Gürültü Gücü} + \text{Girişim Gücü}} = \frac{\sigma_{a_t}^2 h^H s_t s_t^H h}{h^H R h} \quad (19)$$

burada $R = \sigma_{\alpha_i}^2 s_i s_i^H + \sigma_n^2 I$. SINR değerini en yüksek yapan süzgeç, aynı zamanda tespit olasılığını da en yüksek yapacaktır. Bu süzgeç $h_o = R^{-1} s_t$ olarak bulunur. Bu durumda yanlış alarm olasılığı aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$P_{FA} = 1 - F_{\chi_2}\left(\frac{\gamma}{\sigma^2}\right) \quad (20)$$

değişinti değeri aşağıdaki şekilde hesaplanabilir:

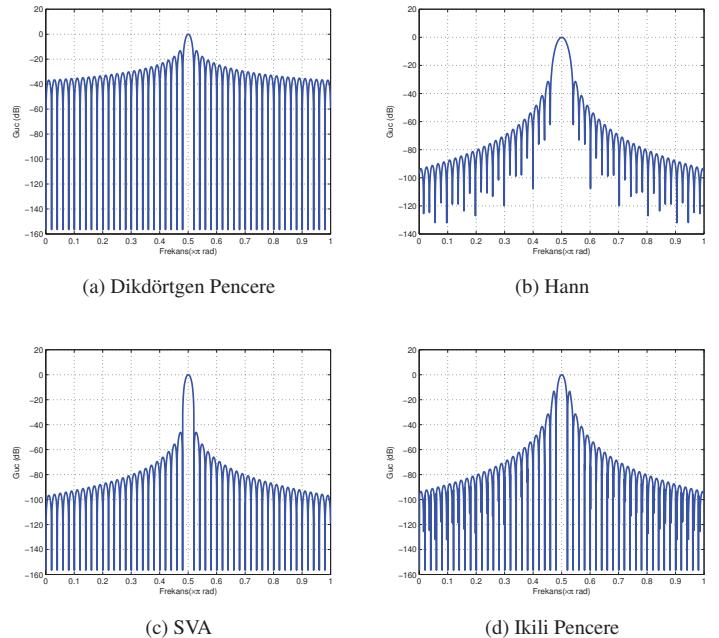
$$\sigma_y^2 = \frac{\sigma_{\alpha_t}^2}{2} |\mathbf{e}_t^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{e}_t|^2 + \frac{\sigma_{\alpha_i}^2}{2} |(\mathbf{R}^{-1} \mathbf{e}_t)^H (\mathbf{R}^{-1} \mathbf{e}_t)| \quad (21)$$

burada $\mathbf{e}_x = [1 \quad e^{jx} \quad e^{j2x} \dots \quad e^{j(N-1)x}]^H$ olarak tanımlanmıştır. Tespit olasılığı (20) eşitliğini kullanarak hesaplanabilir ancak H_1 altında değişinti değeri aşağıdaki şekilde tanımlanmalıdır:

$$\sigma_y^2 = \frac{\sigma_{a_t}^2}{2} |\mathbf{e}_t^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{e}_t|^2 + \frac{\sigma_{\alpha_i}^2}{2} |\mathbf{e}_t^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{e}_i|^2 + \frac{\sigma_n^2}{2} |(\mathbf{R}^{-1} \mathbf{e}_t)^H (\mathbf{R}^{-1} \mathbf{e}_t)| \quad (22)$$

3. BENZETİMLER

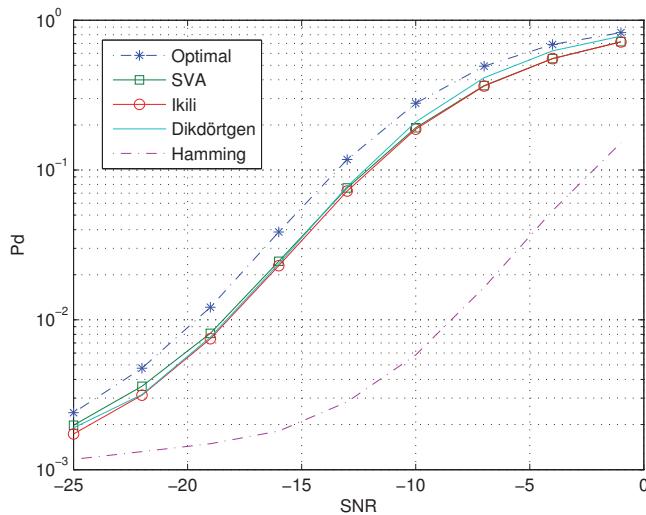
Şekil.1 gürültü etkisi olmadığı durumda çeşitli pencereler kullanılarak oluşturulan frekans spektrumlarını göstermektedir. Şekle bakılarak SVA ve ikili pencereleme için frekans çözünürlüğü ve yan kulak bastırıım miktarı gözlenebilir.



Şekil 1: Tek sinüsoidal işaret için dikdörtgensel pencere, Hann penceresi, ikili pencereleme ve SVA ile elde edilen sonuçlar. Ölçümlerde gürültü bulunmamaktadır.

Yapılan benzetimlerde iki önemli durum göz önünde bulundurulmuştur:

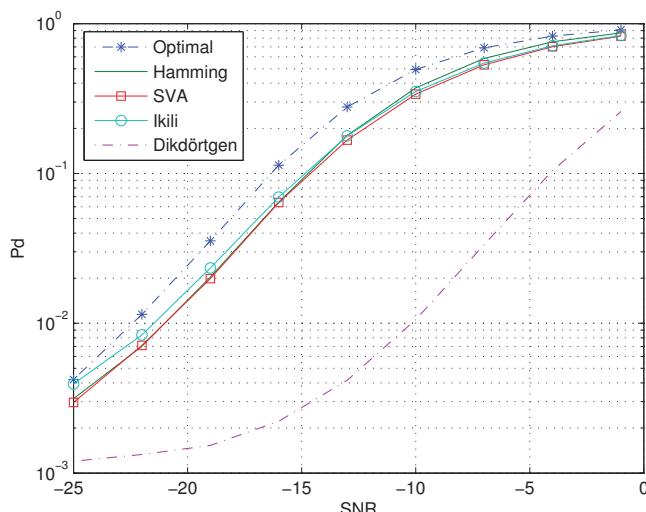
Durum 1: Bu durumda girişim işaretini ve hedef işaretin birbirine yakın frekanslara sahip eşit güçte işaretlerdir. Pencere uygulaması ana lob genişliğini artırdığı için girişim işaretin yakınlarında bulunan başka bir işaretin tespitini engellemektedir. Bu benzetimde toplanan örnek sayısı $N = 100$ ve yanlış alarm olasılığı 10^{-3} parametreleri ile çalışılmıştır. İşaretler arasındaki frekans farkı 0.0175π radyandır. Şekil.2'ye bakılarak dikdörtgensel pencerenin Hamming penceresine göre daha iyi performans verdiği görülmektedir. SVA ve İkili pencere



Şekil 2: Durum 1: Girişim ve hedef işaretleri eşit güçte birbirine yakın frekansta

yöntemleri dikdörtgensel pencere ile aynı performansı vermektedir.

Durum 2: İkinci durumda girişim işareti ve hedef işaretinin frekansları arasındaki fark artırılarak 0.15π olarak ayarlanmıştır. Ayrıca bu durumda girişim işareti, hedef işaretinden 20 dB daha güçlüdür. Benzetim parametreleri Durum 1'dekiler ile aynıdır. Şekil.3, SVA, Hamming penceresi ve İkili pencereleme yöntemlerinin birbirine yakın performanslarla çalıştığını göstermektedir. Optimal saptayıcı, bu yöntemlerden biraz daha iyi çalışmaktadır. Dikdörtgensel pencere, yan kulak bastırımı zayıf olduğu için, girişim işaretinin hedef işaretü üzerindeki etkisini ortadan kaldırılamamış, bu sebeple hedef işaret maskelenmiştir.



Şekil 3: Durum 2: Girişim işaret 20 dB daha güçlü, frekans farkı 0.15π .

4. SONUÇLAR

Sabit bir pencere fonksiyonu kullanıldığında alınan işaretin içeriğine bağlı olarak, durum 1 veya durum 2'de tarif edilen koşullardan birinde sistem tespit performansında azalma olduğu gösterilmiştir. Bu sorunu gidermek için SVA veya ikili pencereleme yöntemleri kullanılabilir.

Bu çalışmada ikili pencereleme, klasik pencereler ve optimal saptayıcı için kuramsal yanlış alarm olasılığı hesaplamaları yapılmıştır. Eşik değeri, yanlış alarm olasılığı kullanılarak kolaylıkla hesaplanabilir. SVA, dikdörtgensel pencerenin frekans çözünürlüğünü koruyarak aynı zamanda yan kulakları bastırılmaktadır. Performans değerlendirmeleri SVA'nın optimal saptayıcıya yakın sonuçlar verdiği göstermiştir. SVA için kuramsal eşik değeri hesaplanamamıştır, ancak benzetimler sonucunda SVA'nın daha basit bir versiyonu olan ikili pencereleme yönteminin de frekans çözünürlüğünde fazla bir artışa neden olmadan yan kulak bastırımını sağlayabildiği görülmüştür. İkili pencereleme yöntemi için kuramsal eşik değeri hesaplamaları verilmiştir.

5. KAYNAKÇA

- [1] Steven M. Kay, *Fundamentals of Statistical Signal Processing Volume II Detection Theory*, Prentice Hall, New Jersey, eleventh printing edition, 1998.
- [2] J.-K. Hwang, “Simultaneous CFAR detection and frequency estimation of a sinusoidal signal in noise,” in *Statistical Signal and Array Processing, 1992. Conference Proceedings., IEEE Sixth SP Workshop on*, Oct. 1992, pp. 78–81.
- [3] D. C. Rife and R. R. Boorstyn, “Multiple-tone parameter estimation from discrete-time observations,” *Bell Syst. Tech.*, vol. 55, pp. 1389–1410, 1976.
- [4] Petre Stoica, Randolph L. Moses, Benjamin Friedlander, Ieee, Torsten Soderstrom, and Senior Member, “Maximum likelihood estimation of the parameters of multiple sinusoids from noisy measurements,” *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. 37, pp. 378–392, 1989.
- [5] F.M. Ahmed, K.A. Elbarbary, and A.R.H. Elbardawiny, “Detection of sinusoidal signals in frequency domain,” oct. 2006, pp. 1–5.
- [6] Boaz Porat, *A Course in Digital Signal Processing*, John Wiley and Sons Inc., New York, first edition, 1997.
- [7] Jung Ah Choi Lee and Jr. D.C. Munson, “Effectiveness of spatially-variant apodization,” *Image Processing, International Conference on*, vol. 1, pp. 147–150, 1995.
- [8] H.C. Stankwitz, R.J. Dallaire, and J.R. Fienup, “Non-linear apodization for sidelobe control in SAR imagery,” *Aerospace and Electronic Systems, IEEE Transactions on*, vol. 31, no. 1, pp. 267 –279, 1995.
- [9] Burak Balcı, “On the detection of sinusoidal signals under the effect of sinusoidal interference,” M.S. thesis, Middle East Technical University, 2010.
- [10] M. K. Simon, *Probability Distributions Involving Gaussian Random Variables*, Springer, Pasadena, California, U.S.A., first edition, 2006.